数理解析研究所講究録
第 1596 巻 2008 年 1-10

Xia spectrum について

神奈川大学　長　宗雄 (Muneo Chō)
新潟大学　古谷　正 (Tadasi Huruya)
東北薬科大学　棚橋浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)

1. Xia スペクトル

Xia スペクトルは，作用素 $T=H+iK=U|T|$ の 2 つの分解に応じて定義される．初めに Cartesian 分解のときについて述べる．ここでの作用素はヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素である．その全体は $B(\mathcal{H})$ と書き，$T\in B(\mathcal{H})$ のスペクトルを $\sigma(T)$ と書く．

(1) $T=H+iK$ を Cartesian 分解とする．このとき

$$\mathcal{S}^{+}(K)=\mathrm{s}-\lim_{t\to\infty}e^{itH}Ke^{-itH},\quad \mathcal{S}^{-}(K)=\mathrm{s}-\lim_{t\to\infty}e^{-itH}Ke^{itH}$$

として，$k\in[0,1]$ に対して，

$$K_k=k\mathcal{S}^{+}(K)+(1-k)\mathcal{S}^{-}(K)$$

と書く ($\mathrm{s}-\lim$ の存在性などは Xia [11])．このとき，e^{itH},e^{-itH} は unitary であるので，

$$\|K_k\|\le k\|K\|+(1-k)\|K\|=\|K\|,\quad H\mathcal{S}^{\pm}(K)=\mathcal{S}^{\pm}(K)H$$

を満たす．従って $T_k=H+iK_k$ は normal 作用素である．よって (H,K_k) の joint approximate point spectrum $\sigma_{ja}(H,K_k)$ は non-empty である．そこで Xia スペクトルを次のように定義する．

[Def.1] $\sigma_X(T)=\bigcup_{0\le k\le 1}\sigma_{ja}(H,K_k)$ を T の Xia スペクトルと呼ぶ．

このとき，次の 2 つの定理が基本となる．

Theorem 1 (Xia, [11]. $T=H+iK$ が hyponormal ならば $\sigma(T)=\bigcup_{0\le k\le 1}\sigma(T_k)$.

Theorem 2 (Xia, [10]). $T=H+iK$ が hyponormal ならば $\sigma(T)=\{a+ib\ :(a,b)\in\sigma_X(T)\}$.

n-tuple に対しては，次のように定義する．

(1') $\mathbf{T}=(T_1,...,T_n)$ を doubly commuting n-tuple で $T_j=H_j+iK_j\ \ (n=1,2,...,n)$ とする．$Y=K_1\cdots K_n$　として

$$\mathcal{S}_j^{+}(Y)=\mathrm{s}-\lim_{t\to\infty}e^{itH_j}Ye^{-itH_j},\quad \mathcal{S}_j^{-}(Y)=\mathrm{s}-\lim_{t\to\infty}e^{-itH_j}Ye^{itH_j}$$

とする．$\mathbf{k} = (k_1, ..., k_n) \in [0,1]^n$ に対して $Y_{\mathbf{k}} = \left[\Pi_{j=1}^n (k_j \mathcal{S}_j^+ + (1-k_j)\mathcal{S}_j^-)\right](Y)$ と書と，$(\mathbf{H}, Y_k)$ は可換な $(n+1)$-tuple より joint approximate point spectrum $\sigma_{ja}(\mathbf{H}, Y_k)$ は non-empty である．そこで，次のように定義する．

[Def.2] $\mathbf{H} = (H_1, ..., H_n)$ を commuting n-tuple of hermitian operators で Y を hermitian とするとき $\sigma_X(\mathbf{H}, Y) = \bigcup_{\mathbf{k}\in[0,1]^n} \sigma_{ja}(\mathbf{H}, Y_{\mathbf{k}})$ と書き $\sigma_X(\mathbf{H}, Y)$ を $(\mathbf{H}, Y)$ の Xia spectrum と呼ぶ．

$\mathbf{H} = (H_1, ..., H_n)$ を commuting n-tuple of hermitian operators, $R \in B(\mathcal{H})$ に対して，作用素 $\mathcal{D}_j : B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(\mathcal{H})$ を次のように定義する．

$$\mathcal{D}_j(R) = i(H_j R - RH_j) \quad (j = 1, 2, ...n).$$

このとき $\mathcal{D}_j(\mathcal{D}_k(R)) = \mathcal{D}_k(\mathcal{D}_j(R))$ が成り立つ．従って，$\mathcal{D}_j\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k\mathcal{D}_j$ を満たす．

[Def.3] $(n+1)$-tuple $(\mathbf{H}, Y) = (H_1, ..., H_n, Y)$ が hyponormal とは

$$\mathcal{D}_{j_1} \cdots \mathcal{D}_{j_m} \geq 0 \quad \text{for all } 1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n$$

を満たすときとする．そして，次の定理が成立する．

Theorem 3 (Xia, [10]). $\mathbf{H} = (H_1, ..., H_n)$ を commuting n-tuple of hermitian operators とする．もし，Y が hermitian で $(\mathbf{H}, Y)$ が hyponormal のとき

$$\|\mathcal{D}_1 \cdots \mathcal{D}_n(Y)\| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \cdot m_{n+1}\Big(\sigma_X(\mathbf{H}, Y)\Big),$$

ここで，m_{n+1} は $\mathbf{R}^{n+1}$ 上のルベーグ測度である．そこで，これを利用するために，次の補題を用意する．(m_n は $\mathbf{R}^n$ 上のルベーグ測度である.)

Lemma 1. $(H_1+iK_1, ..., H_n+iK_n)$ を doubly commuting n-tuple of hyponormal operators とし $Y = K_1 \cdots K_n$ とする，このとき $\forall K_j \geq 0$ ならば $(\mathbf{H}, Y)$ は hyponormal である．

証明. $\mathcal{D}_j(Y) = i(H_jY - YH_j) = i(H_jK_j - K_jH_j)\Pi_{\ell\neq j}K_\ell$ であるので，

$(\mathcal{D}_{j_1} \cdots \mathcal{D}_{j_m})(Y) = i[H_{j_1}, K_{j_1}] \cdots i[H_{j_m}, K_{j_m}]\Pi_{\ell\neq j_1,...,j_m}K_\ell \geq 0$ $(\forall 1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n)$. ♣

Theorem 4. $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n)$ を doubly commuting n-tuple of hyponormal operators $(T_j = H_j + iK_j \ (j = 1, ..., n))$ とする，このとき，次が成立する．

$$\|\Pi_{j=1}^n (T_j^* T_j - T_j T_j^*)\| \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \|K_1\| \cdots \|K_n\| \cdot m_n\Big(\sigma_{ja}(\mathbf{H})\Big).$$

証明. $a_j = \|K_j\|$ とし, $K_j + a_j \ (\geq 0)$ とおく. $Y(a) = (K_1 + a_1) \cdots (K_n + a_n)$ とおくと, このとき $(\mathbf{H}, Y(a))$ は hyponormal であり, かつ

$$\mathcal{D}_1 \cdots \mathcal{D}_n(Y(a)) = \Pi i[H_j, (K_j + a_j)] = \Pi i[H_j, K_j] = \frac{1}{2^n}\Pi(T_j^* T_j - T_j T_j^*).$$

次に, $\sigma_{ja}(\mathbf{H}, Y(a)_{\mathbf{k}}) \subset \sigma_{ja}(\mathbf{H}) \times \sigma(Y(a)_{\mathbf{k}})$ かつ

$$Y(a)_{\mathbf{k}} = \Big[\Pi(k_j \mathcal{S}_j^+ + (1 - k_j)\mathcal{S}_j^-)\Big](Y(a)) = \Pi\Big(k_j \mathcal{S}_j^+(K_j) + (1 - k_j)\mathcal{S}_j^-(K_j) + a_j\Big),$$

であるので, $\|Y(a)_{\mathbf{k}}\| \leq 2^n \cdot \|K_1\| \cdots \|K_n\|$.
従って

$$\|\Pi_{j=1}^n (T_j^* T_j - T_j T_j^*)\| \ \leq \ \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \|K_1\| \cdots \|K_n\| \cdot m_n\Big(\sigma_{ja}(\mathbf{H})\Big). \ \clubsuit$$

この不等式は不満足である. 本当は次のようにしたい:

$$\|\Pi_{j=1}^n (T_j^* T_j - T_j T_j^*)\| \ \leq \ \Big(\text{定数} \Big) \cdot m\Big(\sigma_T(\mathbf{T})\Big),$$

ここで $\sigma_T(\mathbf{T})$ は $\mathbf{T}$ の Taylor スペクトルである. Xia スペクトルと Taylor スペクトルの関係を述べるために写像 $f : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ を

$$f(a_1 + ib_1, ..., a_n + ib_n) = (a_1, ..., a_n, b_1 \cdots b_n).$$

と定義する. このとき次のスペクトル写像定理が成り立つ.

Theorem 5. $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n)$ を doubly commuting n-tuple of hyponormal operators with $T_j = H_j + iK_j \ (j = 1, ..., n)$ とする. このとき

$$f(\sigma_T(\mathbf{T})) = \sigma_X(\mathbf{T}),$$

ここで $\sigma_X(\mathbf{T}) = \sigma_X(\mathbf{H}, Y), \mathbf{H} = (H_1, ..., H_n)$ で $Y = K_1 \cdots K_n$ である.

次に polar 分解のときについて述べる.

(2) $T = U|T|$ を polar 分解とし, U は unitary と仮定する.

$$\mathcal{S}^+(|T|) = \mathrm{s} - \lim_{n\to\infty} U^{*n}|T|U^n, \quad \mathcal{S}^-(|T|) = \mathrm{s} - \lim_{n\to\infty} U^n|T|U^{*n}$$

と記す. 一般には, U は partial isometry である. もし U が isometry なら,

$$V = \begin{pmatrix} U & I - UU^* \\ 0 & U^* \end{pmatrix}, \ |S| = \begin{pmatrix} |T| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = V|S| = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすれば，このとき V は unitary であり

$$V^n|S|V^{*n} = \begin{pmatrix} U^n|T|U^{*n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．しかし

$$V^*|S|V = \begin{pmatrix} U^*|T|U & U^*|T|(I - UU^*) \\ (I - UU^*)|T|U & (I - UU^*)|T|(I - UU^*) \end{pmatrix},$$

なので

$$V^{*n}|S|V^n \neq \begin{pmatrix} U^{*n}|T|U^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

従って, isometry での Xia スペクトルの導入については open problem である.

$0 \leq k \leq 1$ に対して, $|T|_k = k\mathcal{S}^+(|T|) + (1-k)\mathcal{S}^-(|T|)$ とおく.

このとき, $U|T|_k = |T|_k U$ であるので, 作用素 $T_k = U|T|_k$ は normal である．作用素 T の polar 分解による Xia スペクトル $\sigma_X(T)$ は $\sigma_X(T) = \bigcup_{k \in [0,1]} \sigma_{ja}(U, |T|_k)$ と定義する.

次に n-tuple について述べる.

(2') n-tuple $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n)$ で polar 分解 $T_j = U_j|T_j|$ (U_j: unitary) のとき．まず, $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_n)$ を commuting n-tuple of unitary operators とし, $A \in B(\mathcal{H})$ に対して, 作用素 $\mathbf{Q}_j : B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(\mathcal{H})$ を次のように定義する.

$$\mathbf{Q}_j(A) = A - U_j A U_j^*.$$

[Def.4] $A \geq 0$. $(\mathbf{U}, R)$ が semi-hyponormal tuple とは次が成り立つときとする.

$$\mathbf{Q}_{j_1} \cdots \mathbf{Q}_{j_m}(A) \geq 0 \ \text{ for all } 1 \leq j_1 < \cdots < j_m \leq n.$$

上と同様に $0 \leq k \leq 1$ に対して, $A_k = k\mathcal{S}^+(A) + (1-k)\mathcal{S}^-(A)$ と書くことにすると, $(\mathbf{U}, A_k)$ は可換な $(n+1)$-tuple である．従って，この joint approximate point spectrum $\sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_k)$ は non-empty である．そこで $(\mathbf{U}, A)$ の Xia スペクトルは次のように定義する.

$$\sigma_X(\mathbf{U}, A) = \bigcup_{0 \leq k \leq 1} \sigma_{ja}(\mathbf{U}, A_k).$$

Theorem 6 (Xia, [10]). $(\mathbf{U}, A)$ を semi-hyponormal tuple とする．このとき

$$\| \mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_n(A) \| \leq \ \mu(\sigma_X(\mathbf{U}, A)) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{\sigma_X(\mathbf{U},A)} d\theta_1 \cdots d\theta_n \, dr,$$

ここで μ は 単位円周 $\mathbf{T}$ の n 乗上の Haar 測度と $\mathbf{R}$ 上のルベーグ測度の積である.

次に, $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n)$ be a doubly commuting n-tuple of semi-hyponormal operators with unitary U_j ($T_j = U_j|T_j|$: polar decomposition) とする. $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_n)$ かつ $A = |T_1| \cdots |T_n|$ とすると, このとき

$$\mathbf{Q}_1 \cdots \mathbf{Q}_n(A) = \Pi_j(|T_j| - |T_j^*|).$$

従って, 次の結果を持つ.

Theorem 7. $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n)$ を doubly commuting n-tuple of semi-hyponormal operators with unitary U_j ($T_j = U_j|T_j|$: polar decomposition) とする. $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_n)$ とし $A = |T_1| \cdots |T_n|$ とおく. このとき

$$\|\Pi(|T_j| - |T_j^*|)\| \ \leq \ \mu(\sigma_X(\mathbf{U}, A)) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \cdots \int_{\sigma_X(\mathbf{U},A)} d\theta_1 \cdots d\theta_n \, dr.$$

Theorem 8. $\mathbf{T} = (T_1, ..., T_n)$ を doubly commuting n-tuple of semi-hyponormal operators with unitary U_j ($T_j = U_j|T_j|$: polar decomposition) とする. $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_n)$ とし $A = |T_1| \cdots |T_n|$ とおく. このとき

(1) $(z_1, ..., z_n, a) \in \sigma_X(\mathbf{U}, A) \implies \exists a_1, ..., a_n \geq 0 : a = a_1 \cdots a_n$, かつ $(z_1a_1, ..., z_na_n) \in \sigma_T(\mathbf{T})$.

(2) $(z_1a_1, ..., z_na_n) \in \sigma_T(\mathbf{T})$; $|z_j| = 1, a_j \geq 0 \ \ (j = 1, ..., n) \implies (z_1, ..., z_n, a_1 \cdots a_n) \in \sigma_X(\mathbf{U}, A)$.

2. 新しい class の作用素の Xia スペクトル

もし $T = U|T|$ が $T^2 \neq 0$ の作用素で $|T^2| \geq U|T^2|U^*$ を満たすなら, このとき $S = U|T^2|$ とおくと, S は semi-hyponormal である. この条件を満たすとき, この作用素 T を power pusedu-semihyponormal と呼ぶことにする.

$\mathbf{T} = (T_1, T_2, ..., T_n)$ が doubly commuting n-tuple of operators $T_j = U_j|T_j|$ with unitary U_j で $|T_j^2| \geq U_j|T_j^2|U_j^*$ $\forall j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ とする. また $A = |T_1^2| \cdots |T_n^2|$ とおく. このとき $(|T_1^2|, ..., |T_n^2|)$ は commuting n-tuple of positive operators であるので, $A \geq 0$ である.

$\mathbf{U} = (U_1, ..., U_n)$ とおく. $\mathbf{U} = (U_1, ..., U_n)$ は commuting n-tuple of unitary operators でかつ

$$\mathbf{Q}_j A = (\prod_{i \neq j} |T_i^2|)(|T_j^2| - U_j|T_j^2|U_j^*),$$

より，

$$\mathbf{Q}_{j_1}\cdots\mathbf{Q}_{j_m}A=\Big(\prod_{i\neq j_1,\dots,j_m}|T_i^2|\Big)\Big(\prod_{i=j_1,\dots,j_m}(|T_i^2|-U_i|T_i^2|U_i^*)\Big)\geq 0$$

for all $1\leq j_1<\cdots<j_m\leq n$. 従って, $(\mathbf{U},A)$ は semi-hyponormal tuple であり，かつ

$$\mathbf{Q}_1\cdots\mathbf{Q}_nA=\prod_{j=1}^{n}(|T_j^2|-U_j|T_j^2|U_j^*).$$

その結果, 次の２つの定理を得る.

Theorem 9. $\mathbf{T}=(T_1,...,T_n)$ を doubly commuting n-tuple of power pusedu-semihyponormal operators $T_j=U_j|T_j|$ with unitary U_j $(j=1,...,n)$ とする. $\mathbf{U}=(U_1,...,U_n)$ とし, $A=|T_1^2|\cdots|T_n^2|$ とおく. このとき

$$\sigma_X(\mathbf{U},A)=\bigcup_{\mathbf{k}\in[0,1]^n}\sigma_{ja}(\mathbf{U},A_{\mathbf{k}}),$$

ただし，$\mathbf{k}=(k_1,...,k_n)\in[0,1]^n$ で $A_{\mathbf{k}}=\Big[\Pi_{j=1}^n(k_j\mathcal{S}_j^++(1-k_j)\mathcal{S}_j^-)\Big](A)$.

Theorem 10. $\mathbf{T}=(T_1,...,T_n)$ を doubly commuting n-tuple of power pusedu-semihyponormal operators $T_j=U_j|T_j|$ with unitary U_j $(j=1,...,n)$ とする. $\mathbf{U}=(U_1,...,U_n)$ とし, $A=|T_1^2|\cdots|T_n^2|$ とおく. このとき

$$||\prod_{j=1}^{n}(|T_j^2|-U_j|T_j^2|U_j^*)||\leq\frac{1}{(2\pi)^n}\int\cdots\int_{\sigma_X(\mathbf{U},A)}d\theta_1\cdots d\theta_n\,dr.$$

3. Examples

ここでは，作用素 $T=U|T|\in B(\mathcal{H})$ で $|T^2|\geq U|T^2|U^*$ を満たす例を示し，他のクラスとの関連について述べる.
$A,B,C\geq 0$ を 2×2-行列とする. 作用素 T を $(\oplus_0^\infty\mathbf{C}^2)\oplus(\oplus_0^\infty\mathbf{C}^2)$ 上で、次のように定義する

$$T=\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & C & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
B & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
0 & A & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
0 & 0 & A & 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots & & & \ddots\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & & & \ddots
\end{array}\right).$$

このとき

$$|T^2| = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
\sqrt{BA^2B} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & A^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & A^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & A^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{CB^2C} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots
\end{array}\right),$$

$$|T| = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
B & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & A & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & C & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots
\end{array}\right),$$

$$|T^*| = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc}
C & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & B & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & A & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & A & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots
\end{array}\right).$$

そこで,

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ B = bQ \text{ かつ } C = cQ \ \ (0 < b, c)$$

とおく. このとき,

(1) $|T^2| \geq |T^*|^2$ からは

$$\frac{3\sqrt{2}}{4} bQ = \sqrt{BA^2B} \geq C^2 = c^2Q \text{ かつ } A^2 \geq B^2 = b^2Q$$

より $0 < b \leq 1$ かつ $0 < c^2 \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}b$ を得る.
(2) $|T| \geq |T^*|$ からは

$$A \geq B = bQ \geq C = cQ.$$

従って $0 < c \leq b \leq \sqrt{6}(\sqrt{2}-1) = 1.0146\cdots$.

$$(|T^*||T|^2|T^*|)^{\frac{1}{2}} = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \sqrt{CB^2C} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{BA^2B} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & A^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & A^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \end{array}\right),$$

(3) $|T^2| \geq (|T^*||T|^2|T^*|)^{\frac{1}{2}}$ からは

$$A^2 \geq \sqrt{BA^2B} = \frac{3\sqrt{2}}{4}bQ \geq \sqrt{CB^2C} = bcQ.$$

従って $0 < b \leq \frac{2\sqrt{2}}{3} = 0.943\cdots$ かつ $0 < c \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

この例は (1), (2), (3) について次のことが言える. 例えば, $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ とおく. このとき $\frac{2\sqrt{2}}{3} < c \leq 1$ とすれば, T は (1), (3) を満たし (2) を満たさない.

もし $1 < c \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$ とすれば T は (3) を満たし, (1), (2) を満たさない. 次に, 2 つのベクトル $\vec{0}, \vec{x}$ を次のものとする.

$$\vec{0} = (0, 0, \ldots) \quad \text{そして} \quad \vec{x} = (x_1, 0, 0, \ldots),$$

ここで $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. このとき, $\|\vec{0} \oplus \vec{x}\| = \sqrt{2}$ かつ
$T(\vec{0} \oplus \vec{x}) = (Cx_1, 0, 0, \ldots) \oplus (0, 0, 0, \ldots)$ である. 次に

$$T^2 = \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & BC & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ AB & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & A^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \ddots \end{array}\right),$$

であるので

$$T^2(\vec{0} \oplus \vec{x}) = (0, BCx_1, 0, 0, ...) \oplus (0, 0, 0, ...).$$

また

$$Cx_1 = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{かつ} \quad BCx_1 = bc\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

であるので,

$$2c^2 = \|T(\vec{0} \oplus \vec{x})\|^2 \leq \|T^2(\vec{0} \oplus \vec{x})\| \cdot \|\vec{0} \oplus \vec{x}\| = 2bc$$

は $c \leq b$ を導く. 従って, $b < c$. そこで $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ かつ $c = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ とおくと T は paranormal でないが, このとき $b < c$ であるので, 作用素 T は power pusedo-semihyponormal operator であり paranormal でない.

次に, $T^2 \neq 0$ で $|T^2| \geq U|T^2|U^*$ を満たす作用素 T のスペクトルなどの性質の研究に進むことになる. 手始めに,「この作用素は normaloid か?」であるが, まだ証明できない. そこで, paranormal でない例 $b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ で $c = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ のとき, 作用素 T は $|T^2| \geq U|T^2|U^*$ を満たすので調べると, これについては

$$r(T) = \|T\| = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

となって normaloid である. 従って, $\|T^n\| = \|T\|^n$ であるが, T^n の作用素を見ることからも, $\|T^n\| = \|T\|^n$ が成り立つことも分かる.

References

[1] M. Chō, Relations between the Taylor spectrum and the Xia spectrum, Proc. Amer. Math. Soc. 128(2000), 2357-2363.

[2] M. Chō and T. Huruya, Putnam's inequality for p-hyponormal n-tuples, Glasgow Math. J. 41(1999), 13-17.

[3] M. Chō, T. Huruya and K. Tanahashi, Xia spectrum for some class of operators , to appear in Integral Equations and Operator Theory.

[4] M. Chō, R. Curto, T. Huruya and W. Zelazko, Cartesian form of Putnam's inequality for doubly commuting hyponormal n-tuples, Indiana Univ. Math. J. 49(2000), 1437-1447.

[5] R. Curto, On the connectedness of invertible n-tuples, Indiana Univ. Math. J. 29(1980), 393-406.

[6] R. Curto, P. Muhly and D. Xia, A trace estimate for p-hyponormal operators, Integral Equations and Operator Theory 6(1983), 507-514.

[7] T. Furuta, Invitation to linear operators, Taylor and Francis, 2001.

[8] C. R. Putnam, Commutation properties of Hilbert space operators, Springer-Verlag, 1967.

[9] J. L. Taylor, A joint spectrum for several commuting operators, J. Funct. Anal. 6(1970), 172-191.

[10] D. Xia, On the semi-hyponormal n-tuple of operators, Integral Equations and Operator Theory 6(1983), 879-898.

[11] D. Xia, Spectral Theory of Hyponormal Operators, Birkhäuser 1983.

Muneo Chō
Department of Mathematics, Kanagawa University, Yokohama, 221-8686 JAPAN
chiyom01@kanagawa-u.ac.jp

Tadasi Huruya
Department of Mathematics, Fuculty of Education and Human Sciences, Niigata University, Niigata, 950-2181 JAPAN
huruya@ed.niigata-u.ac.jp

Kôtarô Tanahashi
Department of Mathematics, Tohoku College of Pharmacy, Sendai 981-8558, JAPAN
tanahasi@tohoku-pharm.ac.jp